

vergleichen. Wir hoffen, hierüber in einer späteren Arbeit berichten zu können. Da wir in dieser Untersuchung Retardierungseffekte und Ionenpolarisationen vernachlässigt haben, erwarten wir zunächst noch keine allzu gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

6. Schlußbemerkung

Bei KRÖNER und DATTA² ist eine Methode angegeben, wie man von den Kopplungsfunktionen zu den im Spannungs-Dehnungs-Gesetz [z. B. Gl. (1)] auftretenden Tensorfunktionen kommt. Die hier entwickelte Theorie ist eine erweiterte Elastizitätstheorie der Ionenkristalle, und zwar soweit Zeiteffekte nicht betrachtet werden die allgemeinstmögliche *lineare* Theorie. Dies ist daran erkenntlich, daß wir den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung in Form des allgemeinen linearen Raumfunktionalen erhalten. Insbesondere kann man die Kopp-

lungsparameter aus Messungen von Phononenspektren entnehmen, daraus die genannten Material-Tensorfunktionen bestimmen und danach elastizitätstheoretische Probleme bis zum Erhalt numerischer Ergebnisse durchrechnen. Die Lösungsmannigfaltigkeit ist größer als die der entsprechenden Gittertheorie, da in einer Kontinuumstheorie auch Wellen mit einer Länge vorkommen, die kleiner als der doppelte Gitterparameter ist. Wenn solche unphysikalischen Resultate aus der Kontinuumstheorie ausgeschlossen werden, erhält man genau die Lösungen der Gittertheorie (sofern die Kopplungsgrößen in beiden Theorien korrespondieren). Man kann also die Diskretheit des Gitters durch Ausscheiden der kurzen Wellen und durch Einarbeitung des *gemessenen* Phononenspektrums berücksichtigen. Das eben angeführte Ergebnis nehmen wir nur für die lineare Theorie in Anspruch.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit.

Theorie einer zylindrischen Photoionisationskammer hoher Dichte

HANS GRÖNIG

Institut für Allgemeine Mechanik, Technische Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 25 a, 1053—1062 [1970]; eingegangen am 28. Februar 1970)

Herrn Professor Dr. Klaus Oswatitsch zum 60. Geburtstag gewidmet

Es wird die Theorie einer zylindrischen Photoionisationskammer bei großer Dichte und kleinem Ionisationsgrad entwickelt. Unter den zugrunde gelegten Voraussetzungen läßt sich das Problem auf die simultane Lösung der mit Produktionstermen behafteten Kontinuitätsgleichungen für Ionen und Elektronen und der Poisson-Gleichung reduzieren. Physikalisch ist der Bereich zwischen den Elektroden durch drei Zonen gekennzeichnet: die beiden Raumladungsgrenzschichten an den Elektroden und das quasineutrale Gebiet dazwischen. Mathematisch ergibt sich eine analoge Aufteilung durch eine asymptotische Entwicklung der dimensionslosen Grundgleichungen nach einem sehr großen Parameter α . Man erhält explizite Lösungen für die Stromspannungs-Charakteristik, die Sättigungsströme und die Teilchendichten. Die Kenntnis dieser Größen legt es nahe, die Photoionisationskammer für die Eichung von Langmuir-Sonden zu verwenden.

Einleitung

Raumladungsphänomene treten überall dort auf, wo Körper mit einem Plasma in Berührung kommen oder wo große Gradienten Ladungstrennungen ermöglichen. Im besonderen gilt dies für elektrische Grenzschichten bei Wiedereintrittskörpern und Raketenröhren, ferner für die Ionosphärenforschung,

Untersuchungen des solaren Windes und elektrische Vorläufer vor Stoßwellen^{1,2}. Ein wichtiges Anwendungsgebiet stellt die Sondentheorie im Hinblick auf die Plasmadiagnostik dar.

Die hier durchgeführte Theorie der zylindrischen Photoionisationskammer verfolgt zwei Ziele: sie ermöglicht auf Grund asymptotischer Methoden die Berechnung der kompletten Strom-Spannungscharak-

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. H. GRÖNIG, Lehrstuhl für allgemeine Mechanik der Techn. Hochschule, D-5100 Aachen.

¹ S. H. LAM, AIAA J. 2, 256 [1964].

² P. M. CHUNG, Electric characteristics of couette flow and stagnation boundary layer flows of weakly ionized gases. Aerospace Corp., Rep. TDR-169 (3230-12) TN-2 [Oktober 1962].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

teristik und der Elektronen- und Ionendichten als Funktion äußerer Parameter; darüber hinaus legt es die Kenntnis der Plasmadichte nahe, die Kammer zu Eichzwecken für Langmuir-Sonden zu verwenden, um hierdurch eine Vielzahl von Sondentheorien nachzuprüfen³⁻⁶, die bisher experimentell noch nicht verifiziert worden sind. Von COHEN⁷ wurde die Theorie der Photoionisationskammer als ebenes Problem mit unendlich ausgedehnten Elektroden behandelt. Da diese Annahme zu Schwierigkeiten bei der experimentellen Realisation führt, wird hier der zylindersymmetrische Fall untersucht.

1. Prinzip

Die Photoionisationskammer besteht aus zwei koaxialen Zylindern mit den Radien r_1 und r_2 , der Gesamtlänge l ; bei $z=l$ sei ein absorptionsfreier Spiegel, der die bei $z=0$ einfallende, ionisierende Strahlung reflektiert. Ein Stromkreis gestattet es, die Charakteristik der Kammer $U(I)$ zu bestimmen. Durch Reflexion erreicht man, daß der Gesamtphotonenfluß für schwache Absorption unabhängig von z wird. Ist F_λ der Photonenfluß, $F_{\lambda 0}$ sein Wert bei $z=0$, μ der Absorptionskoeffizient, dann gilt

$$F_\lambda = 2 F_{\lambda 0} (1 - \mu l). \quad (1)$$

Die Anzahl der Photoionisationsprozesse pro Volumen- und Zeiteinheit ist

$$N_p = \sigma N_n F_\lambda = \nu N_n, \quad (2)$$

wobei σ der Ionisationsquerschnitt, N_n die Neutralgasdichte und ν als Ionisationsfrequenz gemäß Gl. (2) definiert ist (Abb. 1).

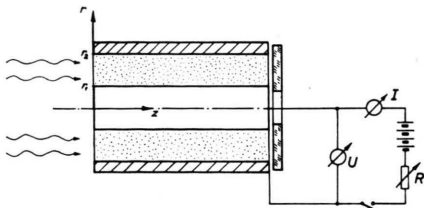


Abb. 1. Prinzipskizze der zylindrischen Photoionisationskammer.

Die Ionisationsprodukte, Elektronen und einfach geladene Ionen, wandern zu den entsprechenden Elektroden, wobei sich innerhalb der Kammer eine

zylindersymmetrische Ladungsteilhendichte ergibt, die qualitativ in Abb. 2 für eine negative äußere Elektrode dargestellt ist. Es existieren drei Schichten: die beiden Raumladungsgrenzschichten an den Elektroden und ein quasineutraler innerer Bereich.

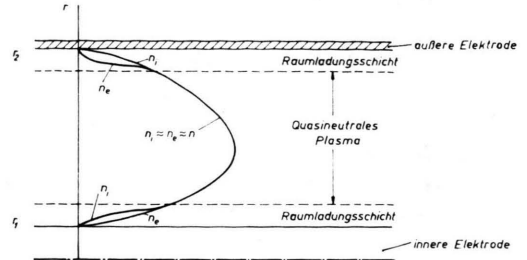


Abb. 2. Qualitativer Verlauf der Teilchendichte von Elektronen und Ionen zwischen den zylindrischen Elektroden.

Die Theorie wird unter der Annahme großer Dichte und kleinem Ionisationsgrad durchgeführt, so daß für das Gas Kontinuumsgleichungen angewandt werden können.

2. Grundgleichungen

Es wird ruhendes Gas und ein so geringer Ionisationsgrad vorausgesetzt, daß die Grundgleichungen aus der Kontinuitätsgleichung für die Ladungsträger und der Poisson-Gleichung bestehen. Bezeichnet man mit D_k den Diffusionskoeffizienten, μ_k die Beweglichkeit, N_k die Teilchendichten mit $k=e, i$ für Elektronen und Ionen und mit E_0 die elektrische Feldstärke, dann ergeben sich mit den Teilchenstromdichten G_k

$$G_e = -D_e \text{grad } N_e - \mu_e N_e E_0, \quad (3)$$

$$G_i = -D_i \text{grad } N_i + \mu_i N_i E_0 \quad (4)$$

die entsprechenden Kontinuitätsgleichungen

$$\text{div}[-D_e \text{grad } N_e - \mu_e N_e E_0] = \nu N_n, \quad (5)$$

$$\text{div}[-D_i \text{grad } N_i + \mu_i N_i E_0] = \nu N_n. \quad (6)$$

Hierzu tritt die Poisson-Gleichung

$$\text{div } E_0 = \frac{e}{\epsilon_0} (N_i - N_e). \quad (7)$$

Die Gln. (5) bis (7) sollen unter der Voraussetzung gelöst werden, daß

$$\lambda \ll h_D < L, \quad (8)$$

³ F. F. CHEN, Probe techniques, Lecture Notes for the Summer Institute in Plasma Physics, Princeton University 1962.

⁴ C. H. SU u. S. H. LAM, Phys. Fluids **6**, 1479 [1963].

⁵ I. M. COHEN, Phys. Fluids **6**, 1492 [1963].

⁶ G. WORTBERG, Die zylindrische Langmuir-Sonde im langsam strömenden Plasma hoher Dichte, Dissertation, Aachen 1966.

⁷ I. M. COHEN, Phys. Fluids **8**, 2097 [1965].

d. h. die mittlere freie Weglänge klein gegenüber der Debye-Länge und diese klein gegenüber einer charakteristischen Körperdimension ist. Wegen der geringen Ionisation gilt $N_k \ll N_n$; Ionen und Elektronen mögen unterschiedliche, aber im gesamten Bereich konstante Temperaturen T_k haben.

Aus der Voraussetzung (8) ergeben sich die Randbedingungen

$$N_k = 0 \quad \text{für} \quad r = r_1 \quad \text{und} \quad r = r_2, \quad (9)$$

wozu noch als weitere Randbedingung die angelegte Potentialdifferenz Φ tritt

$$\int_{r_1}^{r_2} E_0 dr = -\Phi. \quad (10)$$

Mit den folgenden dimensionslosen Variablen

$$\varrho = r/r_2, \quad (11)$$

$$n_k = N_k / (\varepsilon_0 k T_e / e^2 r_2^2), \quad (12)$$

$$E = -E_0 (e r_2 / k T_e), \quad (13)$$

$$\psi_0 = e \Phi / k T_e \quad (14)$$

und folgenden Abkürzungen

$$\tau = T_e / T_i; \quad \delta = D_i / D_e, \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{\nu r_2^2}{D_i} \cdot \frac{N_n}{\varepsilon_0 k T_e / e^2 r_2^2}, \quad (16)$$

erhält man das Gleichungssystem in dimensionsloser Form. Da das Problem zylindersymmetrisch ist (die Kammer wird als lang gegenüber ihrem Durchmesser betrachtet, hängen die Gleichungen nur noch von der Radialkoordinate ϱ ab.

Nach einmaliger Integration erhält man aus den Gln. (5) bis (7) in dimensionsloser Form

$$\frac{dn_i}{d\varrho} + \tau n_i E = -\frac{\alpha}{2} \varrho - \frac{J_i}{\varrho}, \quad (17)$$

$$\frac{dn_e}{d\varrho} - n_e E = -\frac{\delta \alpha}{2} \varrho - \frac{J_e}{\varrho}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} (\varrho E) = n_e - n_i \quad (19)$$

mit den Randbedingungen

$$n_i = n_e = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \varrho = \varrho_1 \\ \varrho = 1 \end{cases} \quad (20)$$

und

$$\int_{\varrho_1}^1 E d\varrho = \psi_0. \quad (21)$$

Die Integrationskonstanten J_k hängen vom Teilchenstrom zu den Elektroden ab:

$$J_k = -\frac{e^2 r_2^2}{\varepsilon_0 k T_e} \cdot \frac{r_m}{D_k} \left[D_k \left(\frac{dN_k}{dr} \right)_{r_m} + \frac{1}{2} \nu N_n r_m \right] \quad (22)$$

mit $m = 1, 2$.

Die Gln. (17) und (18) enthalten die dimensionslosen Parameter τ , δ und α , deren Größe im wesentlichen das Verhalten des Gleichungssystems bestimmt. Nach der Definition gemäß Gl. (15) ergibt sich

$$\tau \geq 1 \quad \text{und} \quad \delta < 1.$$

Der Parameter α läßt sich nach Gl. (16) in folgende Form bringen:

$$\alpha = \frac{\nu}{D_i / r_2^2} \cdot \frac{N_n}{N_0} \cdot \left(\frac{r_2}{h_D} \right)^2, \quad (23)$$

wo N_0 eine charakteristische Elektronendichte und die Debye-Länge mit dieser Dichte gebildet ist; damit ist

$$\alpha = \frac{\text{Diffusionszeit}}{\text{Ionisationszeit}} \cdot \frac{1}{\text{Ionisationsgrad}} \cdot \left(\frac{\text{Charakt. Länge}}{\text{Debye-Länge}} \right)^2.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen stellen die beiden letzten Faktoren so große Zahlen dar, daß ihr Produkt den ersten Faktor stark überwiegt, so daß α zwischen 10^5 und 10^{10} liegt⁷. Damit lassen sich die Gln. (17) bis (19) nach den Methoden der singulären Störungstheorie lösen. Hierbei wird ersichtlich, daß sich bei einer asymptotischen Entwicklung nach reziproken Werten von α das Gleichungssystem aufspaltet in einen quasineutralen Bereich und die beiden Raumladungsgrenzschichten an den Elektroden.

3. Asymptotische Lösungen

Für den Plasmabereich gelten folgende Größenordnungen

$$n_k \sim \alpha; \quad J_k \sim \alpha; \quad E \sim O(1),$$

da die Ladungsträgerdichte und deren Ableitungen offenbar der Teilchenproduktion proportional sind, wohingegen E durch die angelegte endliche Spannung auf kleine Werte beschränkt wird. Durch geeignete Variablendehnung lassen sich n_k und J_k auf Größen von $O(1)$ zurückführen, nämlich

$$n_k = \alpha \tilde{n}_k, \quad J_k = \alpha \hat{J}_k. \quad (24, 25)$$

Durch Einsetzen von (24) und (25) in die Gln. (17) bis (19) erhält man, wobei Striche Ableitungen nach ϱ bedeuten,

$$\tilde{n}_i' + \tau n_i E = -\frac{1}{2} \varrho - \hat{J}_i / \varrho, \quad (26)$$

$$\tilde{n}_e' - \tilde{n}_e E = -\frac{1}{2} \delta \varrho - \hat{J}_e / \varrho, \quad (27)$$

$$\tilde{n}_e - \tilde{n}_i = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} (\varrho E) = O(\alpha^{-1}). \quad (28)$$

Für $\alpha \rightarrow \infty$ folgt aus der Poisson-Gleichung (28)

$$\tilde{n} = \tilde{n}_e = \tilde{n}_i. \quad (29)$$

Hiermit findet man die quasineutrale Lösung aus den Gln. (26) und (27) mit den Randbedingungen (20) zu

$$n = \frac{\alpha}{4} \frac{1+\tau\delta}{1+\tau} \left[(1-\varrho^2) - (1-\varrho_1^2) \frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_1} \right], \quad (30)$$

$$E = - \frac{4}{1+\tau\delta} \left[\frac{1}{2} (1-\delta) \varrho + \frac{1}{\alpha \varrho} (J_i - J_e) \right] / \left[1 - \varrho^2 - (1-\varrho_1^2) \ln \varrho / \ln \varrho_1 \right]. \quad (31)$$

Da in Gl. (20) zwei Randbedingungen zur Verfügung stehen, erhält man noch eine Relation zwischen den dimensionslosen Stromdichten \hat{J}_i und \hat{J}_e

$$\hat{J}_i + \tau \hat{J}_e = \frac{1}{4} (1 + \tau \delta) \frac{1 - \varrho_1^2}{\ln \varrho_1}. \quad (32)$$

Da durch die Vernachlässigung der Poisson-Gleichung eine Ableitung unberücksichtigt geblieben ist, kann die Lösung für den quasineutralen Bereich nach den Gln. (30) und (31) nicht die Raumladungsgrenzschichten erfüllen; als Folge dieser Näherung wird die elektrische Feldstärke nach Gl. (31) an den beiden Elektroden singulär. Diese Singularität läßt sich bei entsprechender Berücksichtigung der Poisson-Gleichung beseitigen. Hierfür bieten sich Koordinatendehnungen an, die sich aus der quasineutralen Lösung herleiten lassen. Aus Gl. (30) ergibt sich für $\varrho \rightarrow 1$

$$n \sim \alpha (1 - \varrho) \quad (33)$$

und aus Gl. (31)

$$E \sim -1/(1 - \varrho). \quad (34)$$

Setzt man die Teilchendichte nach Gl. (33) als Raumladungsdichte und die Feldstärke E nach Gl. (34) in Gl. (19) ein, ergibt sich die Abhängigkeit

$$1 - \varrho \sim \alpha^{-1/3}$$

und damit in der Raumladungsgrenzschicht für $\alpha \rightarrow \infty$ die Größenordnung von n und E zu

$$n \sim \alpha^{2/3}, \quad E \sim \alpha^{1/3}. \quad (35, 36)$$

4. Raumladungsgrenzschicht

4.1. Äußere Elektrode ($\varrho = 1$)

Es können somit folgende, gedehnte Variablen ξ , $\hat{n}_k(\xi)$ und $\hat{E}(\xi)$ eingeführt werden, die in der Grenzschicht von der Größenordnung 1 sind:

$$\xi = \alpha^{1/3} (1 - \varrho) \quad (37)$$

$$n_k(\varrho) = \alpha^{2/3} \hat{n}_k(\xi), \quad (38)$$

$$E(\varrho) = \alpha^{1/3} \hat{E}(\xi). \quad (39)$$

Setzt man die Gln. (37) bis (39) unter Berücksichtigung von Gl. (25) in die Gln. (17) bis (19) ein, entwickelt nach α bis zu Gliedern von der Ordnung 1, dann erhält man mit den Abkürzungen

$$A_i = \frac{1}{2} + \hat{J}_i,$$

$$A_e = \frac{\delta}{2} + \hat{J}_e,$$

$$A_i + \tau A_e = \frac{1}{2} (1 + \tau \delta) (1 + (1 - \varrho_1^2)/2 \ln \varrho_1)$$

das folgende Gleichungssystem

$$-\hat{n}_i' + \tau \hat{n}_i \hat{E} = -A_i + O(\alpha^{-1/3}), \quad (40)$$

$$-\hat{n}_e' - \hat{n}_e \hat{E} = -A_e + O(\alpha^{-1/3}), \quad (41)$$

$$\hat{E}' = \hat{n}_i - \hat{n}_e + O(\alpha^{-1/3}), \quad (42)$$

wobei die Striche Ableitungen nach ξ bedeuten. Hierbei gelten die Randbedingungen für

$$\begin{aligned} \xi = 0: & \quad \hat{n}_k = 0, \quad \text{und für} \\ \xi \rightarrow \infty: & \quad \text{Anpassung an die Plasmalösung.} \end{aligned}$$

Elimination von \hat{n}_i und \hat{n}_e aus den Gln. (40) bis (42) führt nach einmaliger Integration auf folgende Differentialgleichungen 2. Ordnung für \hat{E} , worin a eine neue Integrationskonstante bedeutet:

$$\begin{aligned} \hat{E}'' &= (\tau - 1) \hat{E} \hat{E}' \\ &+ \frac{1}{2} \tau \hat{E}^3 + [(A_i + \tau A_e) \xi + a] \hat{E} + A_i + A_e. \end{aligned} \quad (43)$$

Als Randbedingungen ergeben sich nun für $\xi = 0$:

$$\hat{E}' = 0 \quad \text{für} \quad a = -\frac{1}{2} \tau [\hat{E}(0)]^2 \quad (44)$$

und für $\xi \rightarrow \infty$: Anpassung.

Mit Hilfe einer weiteren Transformation läßt sich Gl. (43) auf eine von COHEN untersuchte Differentialgleichung zurückführen, die bei vielen elektrischen Grenzschichtproblemen auftritt⁷. Führt man folgende Transformationsgleichungen ein

$$\hat{E}(\xi) = b F(\eta), \quad (45 a)$$

$$\eta = c [(A_i + \tau A_e) \xi + a], \quad (45 b)$$

$$b = (A_i + \tau A_e)^{1/3}, \quad (45 c)$$

$$c = (A_i + \tau A_e)^{-2/3}, \quad (45 d)$$

$$\lambda = \frac{A_i - A_e}{A_i + \tau A_e} = \frac{\frac{1}{2} (1 - \delta) + \hat{J}_i - \hat{J}_e}{\frac{1}{2} (1 + \tau \delta) (1 + (1 - \varrho_1^2)/2 \ln \varrho_1)}, \quad (45 e)$$

dann erhält man die COHENsche Gleichung

$$F''(\eta) = (\tau - 1) F F' + \frac{1}{2} \tau F^3 + \eta F + \lambda \quad (46)$$

mit den Randbedingungen

$$F' = 0 \quad \text{auf} \quad \eta_w = -\frac{1}{2} \tau F^2(\eta_w) \quad (47)$$

und für $\xi \rightarrow \infty$ Anpassung an die Plasmalösung.

Es zeigt sich, daß Gl. (46) mit den gegebenen Randbedingungen für jeden Wert von τ und λ , wobei in λ die bisherigen Integrationskonstanten enthalten sind, eine eindeutige Lösung hat. Wegen Gl. (47) ist auch dann der Wert von η an der Elektrodenoberfläche $\eta_w(\lambda, \tau)$.

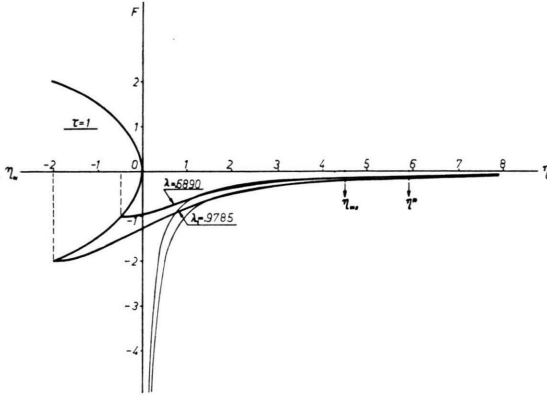


Abb. 3. Lösungskurven der Differentialgleichung für zwei Parameter λ und asymptotische Annäherung an die Funktionen.

Abbildung 3 zeigt den Verlauf der Lösung für zwei Werte von λ , wobei zusätzlich die Näherungslösungen für große Werte von η eingezeichnet sind. η_{ms} stellt den Wert von η dar, von dem ab die exakte Lösung und ihre Näherung bis zu einer bestimmten Stellenzahl numerisch übereinstimmen. Dieser Wert wird für die Berechnung des Potentials in Abschn. 5 benötigt. Die Erfüllung der zweiten Randbedingung für $\eta \rightarrow \infty$ erfolgt am besten über die Näherungslösung von Gl. (46) für große Argumente. Hierfür ergibt sich⁷

$$F(\eta) = -\frac{\lambda}{\eta} + \frac{\lambda}{\eta^4} \left[\frac{\tau \lambda^2}{2} + (\tau - 1) \lambda - 2 \right] + O(\eta^{-7}). \quad (48)$$

Die Anpassung geschieht durch Einführung gemeinschaftlicher Variablen⁸, z. B. der Dachvariablen für beide Teillösungen. Mit der Abkürzung

$$B = \frac{\lambda}{2} + \left[\lambda - \frac{2(1-\delta)}{1+\tau\delta} \right] / \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1-\varrho_1^2}{\ln \varrho_1} \right] \quad (49)$$

ergibt sich aus Gl. (31) für die Plasmalösung

$$\hat{E}(\xi) = -\frac{\lambda}{\xi} - B a^{-1/3} - \frac{\hat{J}_i - \hat{J}_e}{A_i + \tau A_e} a^{-2/3} \xi + O(a^{-1} \xi^2),$$

während aus Gl. (48) für die elektrische Grenzschicht gilt

$$\hat{E}(\xi) = -\frac{\lambda}{\xi} - \frac{\lambda a}{(A_i + \tau A_e) \xi^2} + O(\xi^{-3}). \quad (51)$$

Beide Gleichungen stimmen in den Gliedern dominierender Ordnung überein, wenn für $a \rightarrow \infty$ und $\xi \rightarrow \infty$

$$\xi = O(a^{1/6}). \quad (52)$$

Damit erhält man für den Übergangsbereich

$$\hat{E}(\xi) = -\frac{\lambda}{\xi} + O(a^{-1/3}). \quad (53)$$

Bei bekanntem Wert der Integrationskonstanten lassen sich aus den Gln. (40), (41) und (53) die Teilchendichten der Elektronen und Ionen mit folgender Abkürzung bestimmen:

$$\hat{E}_I(\xi) = \int_0^\xi \hat{E}(\xi') d\xi', \quad (54)$$

$$\hat{n}_i(\xi) = \left(\frac{1}{2} + \hat{J}_i \right) e^{\tau \hat{E}_I(\xi)} \int_0^\xi e^{-\tau \hat{E}_I(\xi')} d\xi', \quad (55 a)$$

$$\hat{n}_e(\xi) = \left(\frac{1}{2} + \hat{J}_e \right) e^{-\hat{E}_I(\xi)} \int_0^\xi e^{\hat{E}_I(\xi')} d\xi'. \quad (55 b)$$

4.2. Innere Elektrode ($q = \varrho_1$)

Die Singularität an der inneren Elektrode läßt sich durch folgende Dehnung der Variablen beseitigen:

$$\bar{\xi} = a^{1/3} (q - \varrho_1), \quad (56)$$

$$n_k(q) = a^{2/3} \hat{n}_k(\bar{\xi}), \quad (57)$$

$$E(q) = a^{1/3} \hat{E}(\bar{\xi}). \quad (58)$$

Aus den Gln. (17) bis (19) folgt mit den Gln. (56) bis (58) durch Entwicklung nach a mit den Abkürzungen

$$\bar{A}_i = \varrho/2 + \hat{J}_i/\varrho_1, \quad (59)$$

$$\bar{A}_e = \delta\varrho/2 + \hat{J}_e/\varrho_1, \quad (60)$$

$$\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e = \frac{1}{2} \varrho_1 (1 + \tau \delta) \left(1 + (1 - \varrho_1^2)/2 \varrho_1^2 \ln \varrho_1 \right) \quad (61)$$

das Gleichungssystem

$$\hat{n}_i' + \tau \hat{n}_i \hat{E} = -\bar{A}_i + O(a^{-1/3}), \quad (62)$$

$$\hat{n}_e' - \hat{n}_e \hat{E} = -\bar{A}_e + O(a^{-1/3}), \quad (63)$$

$$\hat{E}' = \hat{n}_e - \hat{n}_i. \quad (64)$$

⁸ M. VAN DYKE, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Chapter V, Academic Press, New York and London 1964.

Elimination von \hat{n}_i und \hat{n}_e und Integration ergibt

$$\text{mit } \bar{a} = \frac{\tau}{2} [\hat{E}(0)]^2$$

$$\hat{E}''(\xi) = -(\tau - 1) \hat{E} \hat{E}' + \frac{1}{2} \tau \hat{E}^3 - [(\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e) \bar{\xi} + \bar{a}] \bar{\xi} + \bar{A}_i - \bar{A}_e. \quad (65)$$

Mit folgenden Transformationen

$$\hat{E}(\bar{\xi}) = (\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e)^{1/2} F(\bar{\eta}), \quad (66 a)$$

$$\bar{\eta} = -(\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e)^{-1/2} [(\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e) \bar{\xi} + \bar{a}], \quad (66 b)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{A}_i - \bar{A}_e}{\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e} = \left[\frac{\varrho_1}{2} (1 - \delta) + \frac{1}{\varrho_1} (\hat{J}_i - \hat{J}_e) \right] / \left[\frac{\varrho_1}{2} (1 + \tau \delta) \left(1 + \frac{1 - \varrho_1^2}{2 \varrho_1^2 \ln \varrho_1} \right) \right] \quad (66 c)$$

läßt sich Gl. (65) auf die bereits erwähnte COHEN-Gleichung zurückführen:

$$F''(\bar{\eta}) = (\tau - 1) F F' + \frac{1}{2} \tau F^3 + \bar{\eta} F + \bar{\lambda} \quad (67)$$

mit den entsprechenden Randbedingungen für $\bar{\eta}_w$ und $\bar{\eta} \rightarrow \infty$. Für $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ stimmen auch hier Plasma- und Grenzschichtlösung in den Termen 1. Ordnung überein, d. h. für $\bar{\xi} \rightarrow \infty$ gilt

$$\hat{E}(\bar{\xi}) = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\xi}} + O(\alpha^{-1/2}). \quad (68)$$

Die Konstante $\bar{\lambda}$, die bei gegebenem Wert von τ die Feldverteilung an der inneren Elektrode bestimmt, ist eine Funktion der die Feldstärke an der äußeren Elektrode bestimmenden Konstanten λ ; aus den Gln. (45 e) und (66 c) folgt die lineare Abhängigkeit

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\varrho_1^2 + (1 - \varrho_1^2)/2 \ln \varrho_1} \left[\lambda \left(1 + \frac{1 - \varrho_1^2}{2 \ln \varrho_1} \right) - \frac{1 - \delta}{1 + \tau \delta} (1 - \varrho_1^2) \right]. \quad (69)$$

Die Teilchendichten in der Grenzschicht lassen sich analog zu den Gln. (54) und (55) aus den Gln. (62) und (63) ermitteln:

$$\hat{n}_i(\bar{\xi}) = - \left(\frac{\varrho_1}{2} + \frac{\hat{J}_i}{\varrho_1} \right) e^{-\tau \hat{E}_1(\bar{\xi})} \int_0^{\bar{\xi}} e^{\tau \hat{E}_1(\bar{\xi}')} d\bar{\xi}', \quad (70 a)$$

$$\hat{n}_e(\bar{\xi}) = - \left(\frac{\delta \varrho_1}{2} + \frac{\hat{J}_e}{\varrho_1} \right) e^{\hat{E}_1(\bar{\xi})} \int_0^{\bar{\xi}} e^{-\hat{E}_1(\bar{\xi}')} d\bar{\xi}'. \quad (70 b)$$

5. Die Strom-Spannungs-Charakteristik

Die experimentell am leichtesten zu bestimmende Abhängigkeit einer Gasentladung, wie sie in der Photoionisationskammer vorliegt, stellt die Strom-Spannungs-Charakteristik dar. Theoretisch bildet sie

die Verknüpfung zwischen den Integrationskonstanten \hat{J}_i und \hat{J}_e und dem als fünfte Randbedingung gegebenen Potential ψ_0 gemäß Gl. (21). Aus den Gln. (32) und (45 e) folgt eine lineare Abhängigkeit der \hat{J}_k von λ ; da ψ_0 durch Integration der Feldstärke über den Kammerradius ebenfalls von λ bzw. $\bar{\lambda}(\lambda)$ abhängt, läßt sich die Charakteristik als Parameterdarstellung mit dem Parameter λ gewinnen.

Die elektrische Stromdichte j ergibt sich als Funktion der \hat{J}_k aus den Gln. (3) und (4)

$$j = j_i + j_e = e(G_i - G_e). \quad (71)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen nach Gl. (9) ergibt sich hieraus für die Stromdichte an der inneren Elektrode mit den Gln. (16), (22) und (25)

$$j_{r_1} = e \nu N_n \frac{r_2^2}{r_1} (\hat{J}_i - \delta^{-1} \hat{J}_e). \quad (72)$$

Die Stromdichte an der äußeren Elektrode beträgt das (r_1/r_2) -fache von j_{r_1} , so daß der Gesamtstrom an beiden Elektroden gleich ist. Zur Bestimmung der Spannungsabhängigkeit wird das Feldstärkenintegral nach Gl. (21) aufgeteilt in die Potentialdifferenzen für die beiden Raumladungsgrenzschichten und den Plasmabereich; dementsprechend erhält man

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_1 + \bar{\varrho}^*} E(\varrho) d\varrho + \int_{\varrho_1 + \bar{\varrho}^*}^{1 - \varrho^*} E(\varrho) d\varrho + \int_{1 - \varrho^*}^1 E(\varrho) d\varrho = \psi_0. \quad (73)$$

Hierbei sind ϱ^* und $\bar{\varrho}^*$ dimensionslose Abstände von den Elektroden, von den ab die quasineutrale Lösung gültig ist. Nach Gl. (52) sind ϱ^* und $\bar{\varrho}^*$ von der Ordnung $\alpha^{-1/2}$; für die numerische Auswertung wird

$$\varrho^* = \bar{\varrho}^* = \alpha^{-1/2} \quad (74)$$

gesetzt. Das erste und dritte Integral in Gl. (73) lassen sich auf die transformierten Feldstärken $F(\eta)$ bzw. $F(\bar{\eta})$ zurückführen. Es folgt dann

$$\psi_0 = - \int_{\bar{\eta}_w}^{\bar{\eta}^*} F(\bar{\eta}) d\bar{\eta} + \int_{\varrho_1 + \bar{\varrho}^*}^{1 - \varrho^*} E(\varrho) d\varrho + \int_{\eta_w}^{\eta^*} F(\eta) d\eta \quad (75)$$

mit den Grenzen

$$\bar{\eta}^* = -(\bar{A}_i + \tau \bar{A}_e)^{1/2} \alpha^{1/2} \bar{\varrho}^* + \bar{\eta}_w, \quad (75 a)$$

$$\eta^* = -(A_i + \tau A_e)^{1/2} \alpha^{1/2} \varrho^* + \eta_w. \quad (75 b)$$

Für das erste bzw. letzte Integral in Gl. (75) empfiehlt sich folgende Aufteilung:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_w}^{\eta^*} F(\eta) d\eta &= \int_{\eta_w}^{\eta_{ms}} F d\eta + \int_{\eta_{ms}}^{\eta^*} (F - F^\infty) d\eta \\ &+ \int_1^{\eta^*} F^\infty d\eta - \int_1^{\eta_{ms}} F^\infty d\eta \end{aligned} \quad (76)$$

hierin ist F^∞ durch Gl. (48) gegeben; η_{ms} ist so definiert, daß für $\eta > \eta_{ms}$ die asymptotische Lösung F^∞ bis auf zwei Dezimalen mit $F(\eta)$ übereinstimmt. Somit ist das zweite Integral in Gl. (76) vernachlässigbar klein gegenüber den anderen. η_{ms} und das erste Integral

$$S(\lambda, \tau) = \int_{\eta_w}^{\eta_{ms}} F(\eta) d\eta$$

sind als Funktionen von λ und τ tabelliert worden^{7, *}.

Mit der im folgenden definierten Funktion

$$T(\lambda, \tau) = S(\lambda, \tau) + \lambda \ln \eta_{ms} + \frac{\lambda}{3} \left[\frac{\tau \lambda^2}{2} + (\tau - 1) \lambda - 2 \right] (\eta_{ms}^{-3} - 1) \quad (77)$$

ergibt Gl. (76)

$$\int_{\eta_w}^{\eta^*} F(\eta) d\eta = T(\lambda, \tau) - \lambda \ln \eta^* - \frac{\lambda}{3} \left[\frac{\tau \lambda^2}{2} + (\tau - 1) \lambda - 2 \right] [\eta^{*-3} - 1]. \quad (78)$$

Abbildung 4 zeigt den Verlauf von $\lambda(\eta_w, \tau)$ und $T(\eta_w, \tau)$ für $\tau = 1$; über die gestrichelten Linien ist der Zusammenhang $T(\lambda, \tau)$ erkennbar. Analog wird das Integral über $\bar{\eta}$ mit dem Parameter $\bar{\lambda}$ gebildet. Hiermit und mit Gl. (31) erhält man mit der Abkürzung

$$R(\lambda, \tau; \eta^*) = T(\lambda, \tau) - \lambda \ln \eta^* - \frac{\lambda}{3} \left[\frac{\tau \lambda^2}{2} + (\tau - 1) \lambda - 2 \right] [\eta^{*-3} - 1] \quad (79)$$

für die Potentialdifferenz

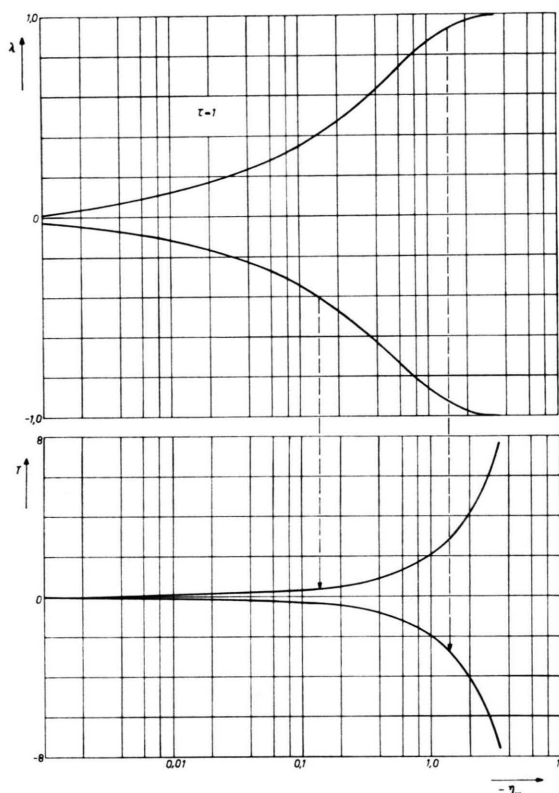


Abb. 4. $T(\lambda, \tau)$ und $\eta(\lambda, \tau)$ für $\tau = 1$.

$$\psi_0 = -R(\bar{\lambda}, \tau; \bar{\eta}^*) + R(\lambda, \tau; \eta^*) + P(\varrho^*, \bar{\varrho}^*; \lambda) + O(\alpha^{-1/2}) + O(\eta_{ms}^{-6}), \quad (80)$$

wobei P die Potentialdifferenz im Plasma bedeutet und folgendermaßen definiert ist

$$P(\varrho^*, \bar{\varrho}^*; \lambda) = \frac{1-\delta}{1+\tau\delta} \left\{ \ln \frac{(1-\varrho_1^2) \ln(1-\varrho^*) - \varrho^*(2-\varrho^*) \ln \varrho_1}{(1-\varrho_1^2) \ln[1+(\bar{\varrho}^*/\varrho_1)] + \bar{\varrho}^*(2\varrho_1+\bar{\varrho}^*) \ln \varrho_1} + \left[\frac{1-\varrho_1^2}{\ln \varrho_1} - 4 \frac{\hat{J}_i - \hat{J}_e}{1-\delta} \right] \int_{\varrho_1+\bar{\varrho}^*}^{1-\bar{\varrho}^*} \frac{d\varrho}{\varrho[1-\varrho^2 - \{(1-\varrho_1^2)/\ln \varrho_1\} \ln \varrho]} \right\}. \quad (81)$$

Im Rahmen der hier durchgeführten asymptotischen Theorie für $\alpha \rightarrow \infty$ lassen sich die in den Funktionen R enthaltenen Logarithmen von η^* und $\bar{\eta}^*$ gemäß den Gln. (75) nach α entwickeln. Zur Abkürzung wird folgende Funktion eingeführt:

$$R_1(\lambda, \tau; \eta^*) = T(\lambda, \tau) - \frac{\lambda \eta_w \varrho^{*-1}}{(A_i + \tau A_e)^{1/2} \alpha^{1/2}} - \lambda \ln[(A_i + \tau A_e)^{1/2} \alpha^{1/2} \varrho^*] - \frac{\lambda}{3} \left[\frac{\tau \lambda^2}{2} + (\tau - 1) \lambda - 2 \right] [\eta^{*-3} - 1]; \quad (82)$$

* Da die von COHEN^{5, 7} tabellierten Werte und Lösungskurven für die hier durchgeführten numerischen Ergebnisse bei weitem nicht ausreichen, wurden die Lösungen von Gl. (46) in Abhängigkeit von λ und τ erneut berechnet; dies

bezieht sich ebenfalls auf die Größen η_{ms} und $S(\lambda, \tau)$. Die zugehörigen Fortran-Programme können auf Wunsch zur Verfügung gestellt werden.

$R_1(\bar{\lambda}, \tau; \bar{\eta}^*)$ wird analog gebildet, indem in Gl. (82) λ, η_w, η^* und ϱ^* durch $\bar{\lambda}, \bar{\eta}_w, \bar{\eta}^*$ und $-\bar{\varrho}^*$ ersetzt werden. Damit erhält man als endgültige Beziehung für die Potentialdifferenz

$$\psi_0 = -R_1(\bar{\lambda}, \tau; \bar{\eta}^*) + R_1(\lambda, \tau; \eta^*) + P(\varrho^*, \bar{\varrho}^*; \lambda) + O(\alpha^{-1/3}) + O(\varrho^{*-2}) + O(\eta_{ms}^{-6}). \quad (83)$$

Die Stromdichte hängt nach Gl. (72) von der dimensionslosen Größe $\hat{J}_i - \delta^{-1} \hat{J}_e$ ab. Aus den Gln. (32) und (45 e) erhält man dann

$$\hat{J}_i - \delta^{-1} \hat{J}_e = \frac{1}{2} \frac{(1+\tau\delta)^2}{\delta(1+\tau)} \left(\lambda - \frac{1-\delta}{1+\tau\delta} \right) \left(1 + \frac{1-\varrho_1^2}{2 \ln \varrho_1} \right) \quad (84)$$

als Funktion von λ .

Die Gln. (83) und (84) beschreiben die dimensionslose Strom-Spannungs-Charakteristik der Photoionisationskammer als Parameterdarstellung mit λ als Parameter; zu jedem Wert λ gibt es jeweils einen eindeutigen Wert für die Spannung und den Strom, so daß sich die theoretisch ermittelte Charakteristik punktweise in einem $(\hat{J}_i - \delta^{-1} \hat{J}_e) - \psi_0$ -Diagramm darstellen läßt. Abbildung 5 zeigt einige Charakteristiken für verschiedene Werte von τ , dem Verhältnis von Elektronen- und Ionentemperatur. Das Verhalten in den Sättigungsbereichen der Charakteristik wird durch die Funktion $T(\lambda, \tau)$ bestimmt, von der die R_1 abhängen.

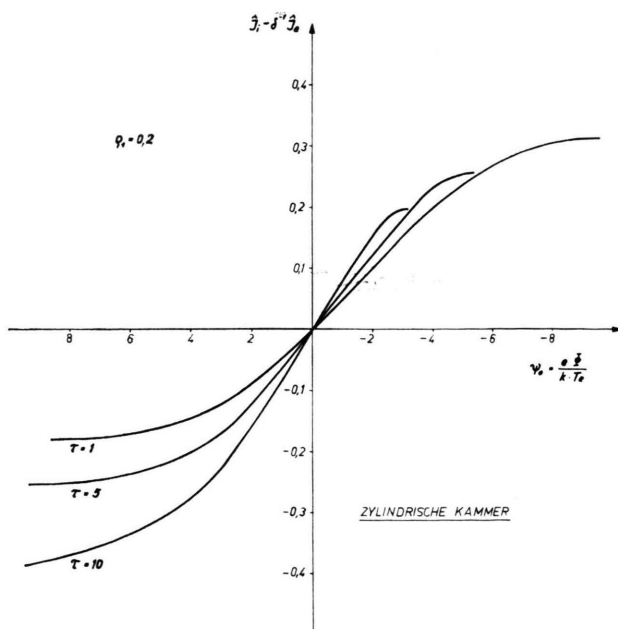


Abb. 5. Charakteristiken für die zylindrische Kammer. Parameter: $\alpha = 10^6$, $\delta = 0,2$, $\tau = 1; 5; 10$; $\varrho_1 = 0,2$.

Eine eingehende Diskussion der Funktionen $\eta_w(\lambda, \tau)$ und $T(\lambda, \tau)$ zeigt ⁶ und ist aus Abb. 4 ersichtlich, daß

$$\eta_w(\lambda, \tau) = \begin{cases} -\infty & \text{für } \lambda \rightarrow +1 \text{ und } -1/\tau, \\ 0 & \text{für } \lambda = 0 \end{cases} \quad (85)$$

und

$$T(\lambda, \tau) = \begin{cases} -\infty & \text{für } \lambda \rightarrow 1, \\ +\infty & \text{für } \lambda \rightarrow -1/\tau, \\ 0 & \text{für } \lambda = 0 \end{cases} \quad (86)$$

gilt.

Ob nun $\bar{\lambda}$ oder λ die Asymptoten der Sättigungsströme bestimmen, liegt gemäß Gl. (69) an den Parametern τ und δ und an ϱ_1 . In Abb. 6 ist der physikalisch sinnvolle Bereich für λ und $\bar{\lambda}$ und deren lineare Abhängigkeit dargestellt.

Im wesentlichen hängen die kritischen Werte für λ und $\bar{\lambda}$ von der Größe $(1-\delta)/(1+\tau\delta)$ ab. Aus Abb. 7 lassen sich die die Asymptoten bestimmenden Wertepaare für die gegebenen Parameter entnehmen. Die Funktion f ist definiert durch

$$f = \left[1 + \frac{1-\varrho_1^2}{2 \ln \varrho_1} \right] / (1-\varrho_1^2). \quad (87)$$

Liegt $(1-\delta)/(1+\tau\delta)$ unterhalb von f , dann entscheiden die Werte von $1/(1+\tau\delta)$ und $\tau\delta/(1+\tau\delta)$ darüber, wie weit sich der Bereich von λ und $\bar{\lambda}$ erstreckt. Unterhalb der Kurve $2f-1$ ist $\lambda = 1$, $\bar{\lambda} = -1$ für $\tau = 1$.

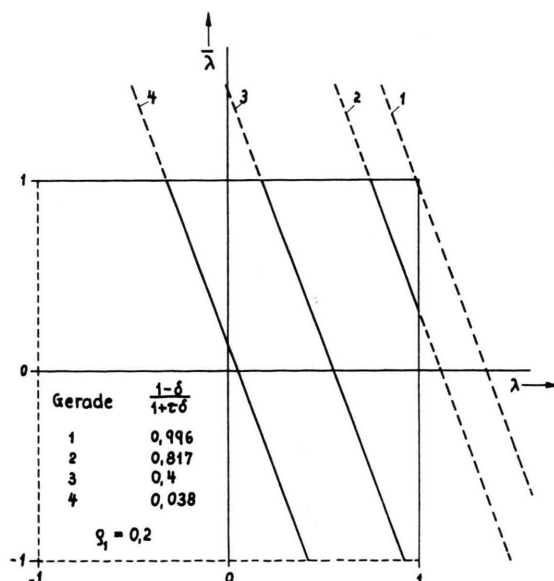


Abb. 6. Bereich von λ und $\bar{\lambda}$ für $\varrho_1 = 0,2$ und verschiedene Werte von $(1-\delta)/(1+\tau\delta)$.

6. Zusammenfassung und experimentelle Realisierungsmöglichkeit

Es wird die Theorie der zylindrischen Photoionisationskammer bei so hoher Dichte beschrieben, daß die mittlere freie Weglänge als klein gegenüber allen anderen Längen, einschließlich der Debye-Länge, angenommen werden kann. In den dimensionslosen Grundgleichungen tritt ein Parameter α auf, der im allgemeinen sehr große Werte annimmt, so daß die Behandlung des Problems nach den Methoden der singulären Störungstheorie erfolgen kann. Die Theorie liefert explizite Ausdrücke für die Teilchendichten und die Gleichung der Charakteristik in Parameterdarstellung. Aus dem Verhältnis der Sättigungsstromdichten läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen

$$\frac{T_e}{T_i} \cdot \frac{D_i}{D_e}$$

unmittelbar gewinnen; allgemein ergibt sich der Wert dieser Größe aus den Sättigungsstromdichten bei zusätzlicher Messung der absoluten Strahlungsabsorption.

Bei einer experimentellen Anordnung ist die primäre Schwierigkeit aller Photoionisationsmessungen zu überwinden, nämlich den Photoeffekt von den Wänden auszuschalten. Dieser sollte durch eine geeignete Differenzmethode weitgehend eliminiert werden können. Hierbei werden zwei völlig gleiche Kammer von dem geteilten Lichtbündel einer Lichtquelle durchsetzt, wobei eine Kammer weitgehend evakuiert ist und die andere das zu ionisierende Gas enthält **. Aus der Differenz der Ströme läßt sich der Photoionisationsstrom bestimmen.

Da sich aus der Theorie für jeden Punkt der Charakteristik die Ladungsträgerverteilung ermitteln läßt, bietet sich hiermit die Möglichkeit an, die für große Dichten entwickelten und bisher experimentell noch nicht verifizierten Sontentheorien in der Photoionisationskammer nachzuprüfen.

Herrn Dipl.-Ing. GEORG LINKE möchte ich für die umfangreichen numerischen Rechnungen danken, die im Rechenzentrum der Technischen Hochschule Aachen durchgeführt wurden.

** Eine experimentelle Anordnung dieser Art für Caesium steht unmittelbar vor der Vollendung. Über experimentelle Ergebnisse dieser Anlage wird an gleicher Stelle berichtet.

Koinzidenzmessung von Photoionen und Photoelektronen

E. v. PUTTKAMER *

Physikalisches Institut der Universität Freiburg

(Z. Naturforsch. 25 a, 1062—1071 [1970]; eingegangen am 24. März 1970)

Coincidence measurements between photoelectrons and photoions produced by 21.21 eV quanta from helium are described. The photoelectrons are energy analysed by a retarding field spectrometer, the photoions mass analysed by a magnetic mass spectrometer. The coincidence curves show the fragmentation of a molecular ion as a function of the internal energy of that ion. Molecules investigated are H_2O , NH_3 , CH_4 , CD_4 , C_2H_2 , C_2H_4 , C_2H_6 , HCOOH , and CH_3OH . In some cases fragmentation does not seem to occur completely, though the internal energy of the ion is sufficient.

Die Untersuchung des Zerfalls angeregter Ionen steht vor der Schwierigkeit, diese in definierten Energiezuständen zu präparieren. Bei Anregung durch Photonen- oder Elektronenstoß mit nachfolgender Massenanalyse werden die Ionen jeweils in einer Vielzahl von elektronischen oder Schwingungszuständen gebildet.

Nach der Photoionisation eines einzelnen Moleküls liegt dieses jedoch in einem definierten Zustand vor. Die Differenz zwischen der Energie des

eingestrahnten Quants und dem Energiezustand des Ions wird als kinetische Energie dem herausfliegenden Elektron mitgegeben. Eine Energiemessung des Photoelektrons gibt daher Auskunft über die innere Energie des zurückbleibenden Ions. Die gleichzeitige massenspektrometrische Untersuchung des Zerfalls des Ions in einem Koinzidenzexperiment liefert damit die Zerfallswahrscheinlichkeit als Funktion der inneren Energie des Mutterions.

Die von LINDHOLM¹ eingeführte Technik des La-

Sonderdruckanforderungen an Dr. E. v. PUTTKAMER, Physikalisches Institut der Universität Mainz, D-6500 Mainz, Jakob-Welder-Weg 11.

* Jetzt Institut für Physik der Universität Mainz.

¹ E. LINDHOLM, Proc. Phys. Soc. London A 66, 1068 [1953].